

Le calcul différentiel



Taux d'accroissement

Soit une fonction $y=f(x)$, définie et continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et un point $M(x_0, f(x_0))$ sur sa courbe. Le point $N(x_1, f(x_1))$, après variation de x , a pour coordonnées :

$$(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$$

- **Accroissement de x :** $\Delta x = x - x_0$
- **Accroissement de $f(x)$:** $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

Dérivée d'une fonction en un point

La dérivée de f en x_0 est la limite du taux de variation lorsque $\Delta x \rightarrow 0$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Exemple : $f(x) = 3x^2$

$$(3x^2)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3(x + \Delta x)^2 - 3x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3(x^2 + (\Delta x)^2 + 2x\Delta x - x^2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3((\Delta x)^2 + 2x\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3\Delta x(\Delta x + 2x)}{\Delta x}$$

$$(3x^2)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 3(\Delta x + 2x) = 6x$$

Dérivée des fonctions usuelles

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$
c (constante)	0
x^m avec $m \neq 0$	mx^{m-1}
$\ln x$ avec $x > 0$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

Dérivées des opérations sur fonctions

Opération sur les fonctions	Dérivée
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$
$f(x) - g(x)$	$f'(x) - g'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$ (produit)	$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$ (quotient)	$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

Dérivés des fonctions composées

Fonction composée $f(g(x))$	Dérivée $f'(g(x)) \cdot g'(x)$
$\sqrt{g(x)}$	$\frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x)$
$\ln(g(x))$	$\frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$
$e^{g(x)}$	$e^{g(x)} \cdot g'(x)$
$\sin(g(x))$	$\cos(g(x)) \cdot g'(x)$
$\cos(g(x))$	$-\sin(g(x)) \cdot g'(x)$
$\tan(g(x))$	$\frac{1}{\cos^2(g(x))} \cdot g'(x)$

Application des dérivées

1. Étude du sens de variation

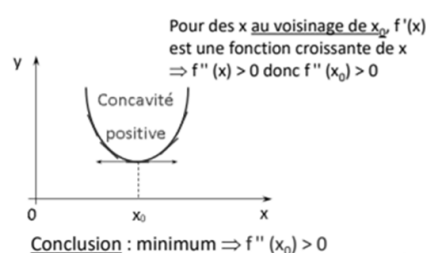
- Si $f'(x) > 0$ sur un intervalle I , alors f est croissante sur I .
- Si $f'(x) < 0$ sur un intervalle I , alors f est décroissante sur I .

2. Recherche des extrema (minimum ou maximum)

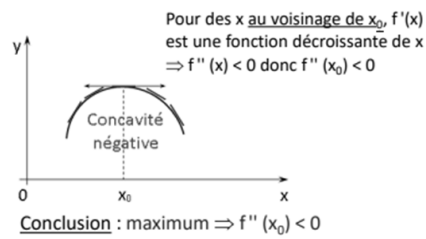
- Si $f'(x)$ change de signe autour de x_0 , alors $f(x_0)$ est un **extremum** :
 - De $+$ à $-$: **maximum**
 - De $-$ à $+$: **minimum**

3. Utilisation de la dérivée seconde $f''(x)$

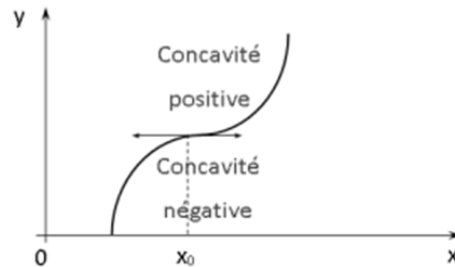
- Permet de **confirmer la nature d'un extremum** :
 - Si $f''(x_0) > 0 \rightarrow$ **minimum** (fonction convexe autour de x_0)



- Si $f''(x_0) < 0 \rightarrow$ **maximum** (fonction concave autour de x_0)



- Si $f''(x_0) = 0 \rightarrow$ possibilité d'avoir un point d'inflexion en x_0



Différentielle d'ordre 1

Si $f(x)$ est dérivable en un point x_0 , alors sa différentielle en x_0 , notée df_{x_0} , est l'application linéaire :

$$df_{x_0}(\Delta x) = f'(x_0) \Delta x$$

• Propriétés

Règles générales (fonctions ff et gg dérivables)

Opération	Différentielle
$d(k \cdot f)$	$k \cdot df$
$d(f + g)$	$df + dg$
$d(f - g)$	$df - dg$
$d(f \cdot g)$	$g \cdot df + f \cdot dg$
$d\left(\frac{f}{g}\right)$	$\frac{g \cdot df - f \cdot dg}{g^2}$
$d(f \circ g)$	$(f' \circ g) \cdot dg$
$d(\ln f)$	$\frac{df}{f}$

Cas pratique : fonctions d'une seule variable x

Opération	Expression avec dx
$d(k \cdot f)$	$(k \cdot f')dx = k \cdot df$
$d(f + g)$	$(f' + g')dx = df + dg$
$d(f - g)$	$(f' - g')dx = df - dg$
$d(f \cdot g)$	$(f' \cdot g + f \cdot g')dx = g \cdot df + f \cdot dg$
$d\left(\frac{f}{g}\right)$	$\left(\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}\right)dx = \frac{g \cdot df - f \cdot dg}{g^2}$
$d(f \circ g)$	$(f' \circ g) \cdot g' dx = (f' \circ g) \cdot dg$
$d(\ln f)$	$\left(\frac{f'}{f}\right)dx = \frac{df}{f}$

Application des différentielles en Physique

On considère une fonction $f(x)$ qui décrit l'évolution d'une grandeur (par exemple une température, une position, une tension...) en fonction d'une variable x . On s'intéresse à ce qui se passe quand on fait varier légèrement x autour d'une valeur x_0 .

$$\Delta f = df_{x_0} + \Delta x \varepsilon(\Delta x)$$

Cela signifie que:

$$\Delta f - df_{x_0} = \Delta x \varepsilon(\Delta x)$$

la différence entre différentielle et accroissement est négligeable quand Δx tend vers 0

La variation de f est appelée accroissement en physique, accroissement qu'on calcule:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

L'approximation de premier ordre est écrit:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Et comme ***la différence entre différentielle et accroissement est négligeable quand Δx tend vers 0***, on peut alors dire:

$$\Delta f \approx df_{x_0}$$

L'erreur absolue se calcule comme suit:

$$\Delta f - df_{x_0}$$

L'erreur relatif se calcule comme suit:

$$E_r(\text{en \%}) = \left| \frac{\Delta f - df}{\Delta f} \right| \times 100 \%$$

Ce pourcentage indique à quel point la différentielle représente bien la variation réelle.

Si Er est très petit (par exemple 0,01 %), l'approximation est excellente