

Le calcul intégrale



On considère une fonction réelle $f(x)$ continue sur un intervalle $[a,b]$.

On cherche à calculer l'aire de la surface comprise, pour cela on décompose l'intervalle $[a,b]$ en n petits intervalles égaux

On approxime l'aire sous la courbe par celle d'un rectangle, ainsi, la somme des aires de ces rectangles est:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x_i$$

Définition:

L'aire algébrique S est appelée intégrale définie de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[a,b]$.

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Propriétés

- Symétrie:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \Rightarrow \int_a^a f(x) dx = 0$$

- Additivité:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

- Distributivité:

$$\int_a^b (k_1 f(x) + k_2 g(x)) dx = \int_a^b k_1 f(x) dx + \int_a^b k_2 g(x) dx = k_1 \int_a^b f(x) dx + k_2 \int_a^b g(x) dx$$

- Si $f(x)$ est paire:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

- Si $f(x)$ est impaire:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

Lien entre primitives et intégrale:

On rappelle que:

Une **primitive** $F(x)$ d'une fonction $f(x)$, c'est une fonction dont la **dérivée** est $f(x)$. En gros : si tu dérivés $F(x)$, tu obtiens $f(x)$.

Une **intégrale définie** représente **l'aire sous la courbe** de $f(x)$ entre $x=a$ et $x=b$.

Alors:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Tableau des primitives usuelles:

Fonction $f(x)$	Primitive $F(x) + C$
k (constante)	$kx + C$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ (si $\alpha \neq -1$)
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)} + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$